

## Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

### zu A 16.1:

| $n$ | $\Sigma k$ | $n^2$ | $\Sigma k^2$ | $(n+1) \cdot \Sigma k$ | $\Sigma(\Sigma k)$ | $(n+1) \cdot \Sigma k - \Sigma(\Sigma k)$ |
|-----|------------|-------|--------------|------------------------|--------------------|-------------------------------------------|
| 1   | 1          | 1     | 1            | 2                      | 1                  | 1                                         |
| 2   | 3          | 4     | 5            | 9                      | 4                  | 5                                         |
| 3   | 6          | 9     | 14           | 24                     | 10                 | 14                                        |
| 4   | 10         | 16    | 30           | 50                     | 20                 | 30                                        |
| 5   | 15         | 25    | 55           | 90                     | 35                 | 55                                        |
| 6   | 21         | 36    | 91           | 147                    | 56                 | 91                                        |
| 7   | 28         | 49    | 140          | 224                    | 84                 | 140                                       |
| 8   | 36         | 64    | 204          | 324                    | 120                | 204                                       |

| $n$ | $n^3$ | $\Sigma k^3$ | $(n+1) \cdot \Sigma k^3$ | $\Sigma(\Sigma k^3)$ | $(n+1) \cdot \Sigma k^3 - \Sigma(\Sigma k^3)$ | $k^4$ | $\Sigma k^4$ |
|-----|-------|--------------|--------------------------|----------------------|-----------------------------------------------|-------|--------------|
| 1   | 1     | 1            | 2                        | 1                    | 1                                             | 1     | 1            |
| 2   | 8     | 9            | 27                       | 10                   | 17                                            | 16    | 17           |
| 3   | 27    | 36           | 144                      | 46                   | 98                                            | 81    | 98           |
| 4   | 64    | 100          | 500                      | 146                  | 354                                           | 256   | 354          |
| 5   | 125   | 225          | 1350                     | 371                  | 979                                           | 625   | 979          |
| 6   | 216   | 441          | 3087                     | 812                  | 2275                                          | 1296  | 2275         |
| 7   | 343   | 784          | 6272                     | 1596                 | 4676                                          | 2401  | 4676         |
| 8   | 512   | 1296         | 11664                    | 2892                 | 8772                                          | 4096  | 8772         |

### zu A 16.2:

$$c(n+1) - c(n) = \alpha \cdot (n+1)^2 + \beta \cdot (n+1) + \gamma - \alpha \cdot n^2 - \beta \cdot n - \gamma = 2\alpha \cdot n + (\alpha + \beta)$$

Koeffizientenvergleich mit  $b(n) = u \cdot n + v$  ergibt

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot u \quad \text{und hieraus} \quad v = \frac{1}{2} \cdot u + \beta \Leftrightarrow \beta = v - \frac{1}{2} \cdot u$$

### zu A 16.3:

#### • Summe der ersten $n$ vierten Potenzen

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades:  $s(n) = a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f$

Der Tabelle entnimmt man:

$s(0) = 0$ ;  $s(1) = 1$ ;  $s(2) = 17$ ;  $s(3) = 98$ ;  $s(4) = 354$ ;  $s(5) = 979$ . Wegen  $s(0) = 0$  folgt unmittelbar:  $f = 0$ .

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 5 Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a+b+c+d+e=1 \\ 32a+16b+8c+4d+2e=17 \\ 243a+81b+27c+9d+3e=98 \\ 1024a+256b+64c+16d+4e=354 \\ 3125a+625b+125c+25d+5e=979 \end{array} \right|.$$

Dieses hat die Lösung  $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{30}\right)$ .

Es gilt also:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

- **Summe der ersten n fünften Potenzen**

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 6. Grades:

$$s(n) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$$

$$s(0) = 0; s(1) = 1; s(2) = 33; s(3) = 276; s(4) = 1300; s(5) = 4425; s(6) = 12201.$$

Wegen  $s(0) = 0$  folgt unmittelbar:  $g = 0$ .

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a+b+c+d+e+f=1 \\ 64a+32b+16c+8d+4e+2f=33 \\ 729a+243b+81c+27d+9e+3f=276 \\ 4096a+1024b+256c+64d+16e+4f=1300 \\ 15625a+3125b+625c+125d+25e+5f=4425 \\ 46656a+7776b+1296c+216d+36e+6f=12201 \end{array} \right|.$$

Dieses hat die Lösung  $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; 0; -\frac{1}{12}; 0\right)$ .

Es gilt also:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

#### zu A 16.4:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

$$[a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e] + (n+1)^3 = a \cdot (n+1)^4 + b \cdot (n+1)^3 + c \cdot (n+1)^2 + d \cdot (n+1) + e \Leftrightarrow$$

$$a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + (n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1) =$$

$$a \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + c \cdot (n^2 + 2n + 1) + d \cdot (n + 1) + e \Leftrightarrow$$

$$n^4 \cdot (a - a) + n^3 \cdot (b + 1 - 4a - b) + n^2 \cdot (c + 3 - 6a - 3b - c) +$$

$$n \cdot (d + 3 - 4a - 3b - 2c - d) + (e + 1 - a - b - c - d - e) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n^3 \cdot (1 - 4a) + n^2 \cdot (3 - 6a - 3b) + n \cdot (3 - 4a - 3b - 2c) + (1 - a - b - c - d) = 0$$

und hieraus schrittweise  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{4}$ ,  $d = 0$  (und  $e = 0$  wegen  $s(0) = 0$ ).

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

$$[a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f] + (n+1)^4$$

$$= a \cdot (n+1)^5 + b \cdot (n+1)^4 + c \cdot (n+1)^3 + d \cdot (n+1)^2 + e \cdot (n+1) + f \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f + (n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1) \\ = a \cdot (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + b \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + c \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ + d \cdot (n^2 + 2n + 1) + e \cdot (n + 1) + f \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^5 \cdot (a - a) + n^4 \cdot (b + 1 - 5a - b) + n^3 \cdot (c + 4 - 10a - 4b - c) + n^2 \cdot (d + 6 - 10a - 6b - 3c - d) \\ + n \cdot (e + 4 - 5a - 4b - 3c - 2d - e) + (f + 1 - a - b - c - d - e - f) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^4 \cdot (1 - 5a) + n^3 \cdot (4 - 10a - 4b) + n^2 \cdot (6 - 10a - 6b - 3c) + n \cdot (4 - 5a - 4b - 3c - 2d) + \\ (1 - a - b - c - d - e) = 0 \end{aligned}$$

und hieraus schrittweise  $a = \frac{1}{5}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{3}$ ,  $d = 0$ ,  $e = -\frac{1}{30}$  (und  $f = 0$  wegen  $s(0) = 0$ ).

#### zu A 16.5:

$$\begin{aligned} a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + \binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \cdot 1 \\ = a \cdot \left( \binom{3}{0} \cdot n^3 + \binom{3}{1} \cdot n^2 + \binom{3}{2} \cdot n + \binom{3}{3} \right) + b \cdot \left( \binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \right) + c \cdot \left( \binom{1}{0} \cdot n + \binom{1}{1} \right) + d \end{aligned}$$

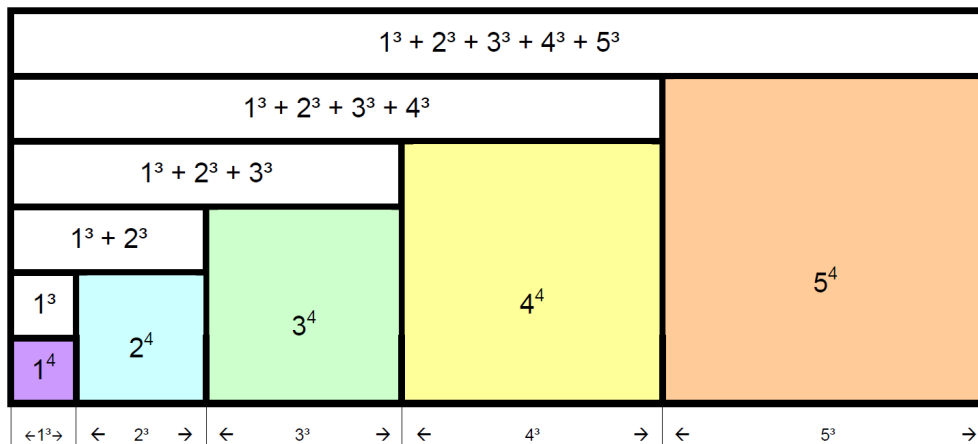
also

$$\left( \binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a \right) \cdot n^2 + \left( \binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b \right) \cdot n + \left( \binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c \right) = 0$$

Hieraus ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\left( \binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left( \binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left( \binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c \right) = 0$$

#### zu A 16.6:



$$\begin{aligned} [1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4] + [1^3 + (1^3 + 2^3) + (1^3 + 2^3 + 3^3) + \dots + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)] \\ = (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4] + \left[ \left( \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right) + \left( \frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \right) + \dots + \left( \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 \right) \right] \\ = (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \end{aligned}$$

$$\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4\right] + \left[\frac{1}{4} \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + \frac{1}{2} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)\right]$$

$$= (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$$

$$\frac{5}{4} \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{4}{5} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

und weiter

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left(\frac{4}{5}n + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{2}{5}n^4 + \frac{1}{5}n^3 + \frac{1}{10}n^4 + \frac{1}{5}n^3 + \frac{1}{10}n^2 - \frac{1}{15}n^3 - \frac{1}{10}n^2 - \frac{1}{30}n$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

#### zu A 16.7:

Im ersten Fall kann man die Gleichung wie folgt umformen:  $\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} = \frac{2n+1}{3}$ ;

Dies ist möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung ein Produkt steht.

Eine solche Umformung ist bei der Herleitung der Summe der Kubikzahlen nicht möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung zwei Summenterme stehen und keine einfache Quotientenbildung möglich ist.

#### zu A 16.8:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 3 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3}$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{n}{1} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
|   |    |    | 0  |
|   |    | 1  | 1  |
|   | 3  | 4  | 5  |
| 2 | 5  | 9  | 14 |
| 2 | 7  | 16 | 30 |
| 2 | 9  | 25 | 55 |
|   | 11 | 36 | 91 |

**zu A 16.9:**

[illegible]

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 15 \cdot \binom{n}{2} + 50 \cdot \binom{n}{3} + 60 \cdot \binom{n}{4} + 24 \cdot \binom{n}{5}$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{n}{1} + 15 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} + 50 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 60 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 24 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

**zu A 16.10:**

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen  $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = n^3 + 3n^2 + 2n$  ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4},$$

also

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \left[ \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{2} - (2n+1) - 2 \right] = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \left[ \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen  $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$  ergibt sich aus der Gleichung

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5}$$

$$\begin{aligned} & (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) + 6 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 11 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 & (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) \\
 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} - 6 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - 11 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} - 6 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - 11 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6 \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) - 45 \cdot n \cdot (n+1) - 55 \cdot (2n+1) - 90] \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6n^3 + 54n^2 + 156n + 144 - 45n^2 - 45n - 110n - 55 - 90] \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6n^3 + 9n^2 + n - 1] = \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)
 \end{aligned}$$

#### zu A 16.11:

- Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen  $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$  ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \cdot 1$$

also

$$\begin{aligned}
 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) &= (n+1)^4 - 1^4 - 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) - n \cdot 1 \\
 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n \\
 &= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1) = n^2 \cdot (n+1)^2
 \end{aligned}$$

also

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

- Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen  $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$  ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$$(n+1)^5 - 1^5 = 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n \cdot 1$$

also

$$\begin{aligned}
 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) &= (n+1)^5 - 1^5 - 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) - n \cdot 1 \\
 &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - 1 - 2,5n^4 - 5n^3 - 2,5n^2 - 10/3 \cdot n^3 - 5n^2 - 5/3 \cdot n - 2,5n^2 - 2,5n - n \\
 &= n^5 + 5/2 \cdot n^4 + 5/3 \cdot n^3 - 1/6 \cdot n
 \end{aligned}$$

also

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

#### zu A 16.12:

$$\begin{aligned}
 S_4(n) &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} \cdot \left[ \binom{5}{0} \cdot B_0 \cdot n^5 + \binom{5}{1} \cdot B_1 \cdot n^4 + \binom{5}{2} \cdot B_2 \cdot n^3 + \binom{5}{3} \cdot B_3 \cdot n^2 + \binom{5}{4} \cdot B_4 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \cdot [B_0 \cdot n^5 + 5 \cdot B_1 \cdot n^4 + 10 \cdot B_2 \cdot n^3 + 10 \cdot B_3 \cdot n^2 + 5 \cdot B_4 \cdot n^1] = \frac{1}{5} \cdot \left[ n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n^1 \right]
 \end{aligned}$$

wobei  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$  und  $B_4 = -\frac{1}{30}$ .

$$\begin{aligned}
 S_5(n) &= 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[ \binom{6}{0} \cdot B_0 \cdot n^6 + \binom{6}{1} \cdot B_1 \cdot n^5 + \binom{6}{2} \cdot B_2 \cdot n^4 + \binom{6}{3} \cdot B_3 \cdot n^3 + \binom{6}{4} \cdot B_4 \cdot n^2 + \binom{6}{5} \cdot B_5 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[ B_0 \cdot n^6 + 6 \cdot B_1 \cdot n^5 + 15 \cdot B_2 \cdot n^4 + 20 \cdot B_3 \cdot n^3 + 15 \cdot B_4 \cdot n^2 + 6 \cdot B_5 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[ n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \right]
 \end{aligned}$$

wobei  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_5 = 0$

#### zu A 16.13:

- Summe der ersten n Quadratzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 3. Grades soll durch die Punkte  $P_0(0|0)$ ,  $P_1(1|1)$ ,  $P_2(2|5)$  und  $P_3(3|14)$  verlaufen.

$$\begin{aligned}
 L_3(n) &= \frac{(n-x_1)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \frac{(n-x_0)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 \\
 &\quad + \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3 \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot 1 \\
 &\quad + \frac{(n-0)(n-1)(n-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot 5 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \cdot 14 \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \cdot (n^3 - 5n^2 + 6n) - \frac{5}{2} \cdot (n^3 - 4n^2 + 3n) + \frac{14}{6} \cdot (n^3 - 3n^2 + 2n) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n
 \end{aligned}$$

- Summe der ersten n Kubikzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 4. Grades soll durch die Punkte  $P_0(0|0)$ ,  $P_1(1|1)$ ,  $P_2(2|9)$ ,  $P_3(3|36)$  und  $P_4(4|100)$  verlaufen.

$$\begin{aligned}
 L_4(n) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 1 \\
 &\quad + \frac{(n-0)(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 9 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 36 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 100 \\
 &= 0 - \frac{1}{6} \cdot (n^4 - 9n^3 + 26n^2 - 24n) + \frac{9}{4} \cdot (n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n) \\
 &\quad - \frac{36}{6} \cdot (n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n) + \frac{100}{24} \cdot (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2
 \end{aligned}$$

Mathematik ist schön

Anregungen zum Anschauen und Erforschen für  
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Strick, H.K.

2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-59059-1